Series OSR

कोड नं. **65/3**
Code No.

रोल नं.
Roll No. | | | | | | | |

परीक्षार्थी कोड को उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अवश्य लिखें ।

Candidates must write the Code on the title page of the answer-book.

- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में मुद्रित पृष्ठ **11** हैं ।
- प्रश्न-पत्र में दाहिने हाथ की ओर दिए गए कोड नम्बर को छात्र उत्तर-पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर लिखें ।
- कृपया जाँच कर लें कि इस प्रश्न-पत्र में **29** प्रश्न हैं ।
- **कृपया प्रश्न का उत्तर लिखना शुरू करने से पहले, प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखें ।**
- इस प्रश्न-पत्र को पढ़ने के लिए 15 मिनट का समय दिया गया है । प्रश्न-पत्र का वितरण पूर्वाह्न में 10.15 बजे किया जाएगा । 10.15 बजे से 10.30 बजे तक छात्र केवल प्रश्न-पत्र को पढ़ेंगे और इस अवधि के दौरान वे उत्तर-पुस्तिका पर कोई उत्तर नहीं लिखेंगे ।
- Please check that this question paper contains **11** printed pages.
- Code number given on the right hand side of the question paper should be written on the title page of the answer-book by the candidate.
- Please check that this question paper contains **29** questions.
- **Please write down the Serial Number of the question before attempting it.**
- 15 minutes time has been allotted to read this question paper. The question paper will be distributed at 10.15 a.m. From 10.15 a.m. to 10.30 a.m., the students will read the question paper only and will not write any answer on the answer-book during this period.

गणित

MATHEMATICS

निर्धारित समय : 3 घण्टे | *अधिकतम अंक : 100*

Time allowed : 3 hours | *Maximum Marks : 100*

सामान्य निर्देश :

(i) ***सभी*** *प्रश्न अनिवार्य हैं ।*

(ii) *इस प्रश्न पत्र में* ***29*** *प्रश्न हैं जो तीन खण्डों में विभाजित हैं : अ, ब तथा स । खण्ड अ में* ***10*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***एक अंक*** *का है । खण्ड ब में* ***12*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***चार अंक*** *का है । खण्ड स में* ***7*** *प्रश्न हैं जिनमें से प्रत्येक* ***छः अंक*** *का है ।*

(iii) *खण्ड अ में सभी प्रश्नों के उत्तर एक शब्द, एक वाक्य अथवा प्रश्न की आवश्यकता अनुसार दिए जा सकते हैं ।*

(iv) *पूर्ण प्रश्न पत्र में विकल्प नहीं हैं । फिर भी चार अंकों वाले 4 प्रश्नों में तथा छः अंकों वाले 2 प्रश्नों में आन्तरिक विकल्प है । ऐसे सभी प्रश्नों में से आपको एक ही विकल्प हल करना है ।*

(v) *कैलकुलेटर के प्रयोग की अनुमति* ***नहीं*** *है । यदि आवश्यक हो तो आप लघुगणकीय सारणियाँ माँग सकते हैं ।*

General Instructions :

(i) ***All*** *questions are compulsory.*

(ii) *The question paper consists of* ***29*** *questions divided into three sections A, B and C. Section A comprises of* ***10*** *questions of* ***one mark*** *each, Section B comprises of* ***12*** *questions of* ***four marks*** *each and Section C comprises of* ***7*** *questions of* ***six marks*** *each.*

(iii) *All questions in Section A are to be answered in one word, one sentence or as per the exact requirement of the question.*

(iv) *There is no overall choice. However, internal choice has been provided in 4 questions of four marks each and 2 questions of six marks each. You have to attempt only one of the alternatives in all such questions.*

(v) *Use of calculators is* ***not*** *permitted. You may ask for logarithmic tables, if required.*

खण्ड अ

SECTION A

प्रश्न संख्या 1 से 10 तक प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है ।

Question numbers 1 to 10 carry 1 mark each.

1. यदि A एक ऐसा वर्ग आव्यूह है कि $A^2 = A$ है, तो $7A - (I + A)^3$ का मान लिखिए, जहाँ I एक तत्समक आव्यूह है ।

If A is a square matrix such that $A^2 = A$, then write the value of $7A - (I + A)^3$, where I is an identity matrix.

2. यदि $\begin{bmatrix} x - y & z \\ 2x - y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ है, तो $x + y$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\begin{bmatrix} x - y & z \\ 2x - y & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, find the value of $x + y$.

3. यदि $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{4}$, $xy < 1$ है, तो $x + y + xy$ का मान लिखिए ।

If $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \frac{\pi}{4}$, $xy < 1$, then write the value of $x + y + xy$.

4. यदि $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\begin{vmatrix} 3x & 7 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}$, find the value of x.

5. यदि $f(x) = \int_0^x t \sin t \, dt$ है, तो $f'(x)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $f(x) = \int_0^x t \sin t \, dt$, then write the value of $f'(x)$.

6. 'p' का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए सदिश $3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ तथा $\hat{i} - 2p\hat{j} + 3\hat{k}$ समांतर हैं ।

Find the value of 'p' for which the vectors $3\hat{i} + 2\hat{j} + 9\hat{k}$ and $\hat{i} - 2p\hat{j} + 3\hat{k}$ are parallel.

7. यदि N पर $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ एक संबंध है, तो R का परिसर लिखिए ।

If $R = \{(x, y) : x + 2y = 8\}$ is a relation on N, write the range of R.

8. यदि एक रेखा के कार्तीय समीकरण $\frac{3-x}{5} = \frac{y+4}{7} = \frac{2z-6}{4}$ हैं, तो उस रेखा का सदिश समीकरण लिखिए ।

If the cartesian equations of a line are $\frac{3-x}{5} = \frac{y+4}{7} = \frac{2z-6}{4}$, write the vector equation for the line.

9. यदि $\int_0^a \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{8}$ है, तो a का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\int_0^a \frac{1}{4+x^2} dx = \frac{\pi}{8}$, find the value of a.

10. यदि $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ परस्पर लंबवत् सदिश हैं तथा $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ और $|\vec{a}| = 5$ है, तो $|\vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are perpendicular vectors, $|\vec{a} + \vec{b}| = 13$ and $|\vec{a}| = 5$, find the value of $|\vec{b}|$.

खण्ड ब

SECTION B

प्रश्न संख्या 11 से 22 तक प्रत्येक प्रश्न 4 अंक का है ।

Question numbers 11 to 22 carry 4 marks each.

11. अवकल समीकरण $(1 + x^2) \dfrac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}$ को हल कीजिए ।

Solve the differential equation $(1 + x^2) \dfrac{dy}{dx} + y = e^{\tan^{-1} x}$.

12. दर्शाइए कि चार बिन्दु A, B, C तथा D, जिनके स्थिति सदिश क्रमशः $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ तथा $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ हैं, समतलीय हैं ।

अथवा

सदिश $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ का सदिशों $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ तथा $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ के योगफल की दिशा में एक मात्रक सदिश के साथ अदिश गुणनफल 1 के बराबर है । λ का मान ज्ञात कीजिए और अतः $\vec{b} + \vec{c}$ की दिशा में एक मात्रक सदिश ज्ञात कीजिए ।

Show that the four points A, B, C and D with position vectors $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-\hat{j} - \hat{k}$, $3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}$ and $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ respectively are coplanar.

OR

The scalar product of the vector $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$ with a unit vector along the sum of vectors $\vec{b} = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 5\hat{k}$ and $\vec{c} = \lambda\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ is equal to one. Find the value of λ and hence find the unit vector along $\vec{b} + \vec{c}$.

13. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{4x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

अथवा

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5x+6}}\, dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{4x \sin x}{1+\cos^2 x}\, dx$$

OR

Evaluate :

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5x+6}}\, dx$$

14. x के वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $y = [x(x-2)]^2$ एक वर्धमान फलन है ।

अथवा

वक्र $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ के बिन्दु $(\sqrt{2}\,a, b)$ पर स्पर्श रेखा तथा अभिलंब के समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the value(s) of x for which $y = [x(x-2)]^2$ is an increasing function.

OR

Find the equations of the tangent and normal to the curve $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ at the point $(\sqrt{2}\,a, b)$.

15. यदि फलन $f : R \to R$, $f(x) = x^2 + 2$ तथा $g : R \to R$, $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$ द्वारा प्रदत्त हैं, तो fog तथा gof ज्ञात कीजिए और अतः fog (2) तथा gof (– 3) ज्ञात कीजिए ।

If the function $f : R \to R$ be given by $f(x) = x^2 + 2$ and $g : R \to R$ be given by $g(x) = \frac{x}{x-1}$, $x \neq 1$, find fog and gof and hence find fog (2) and gof (– 3).

16. सिद्ध कीजिए कि

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$

अथवा

यदि $\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+4}\right) = \frac{\pi}{4}$ है, तो x का मान ज्ञात कीजिए ।

Prove that

$$\tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x, \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} \leq x \leq 1$$

OR

If $\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+4}\right) = \frac{\pi}{4}$, find the value of x.

17. एक प्रयोग के सफल होने का संयोग उसके असफल होने से तीन गुना है । प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि अगले पाँच परीक्षणों में से कम-से-कम 3 सफल होंगे ।

An experiment succeeds thrice as often as it fails. Find the probability that in the next five trials, there will be at least 3 successes.

18. यदि $y = Pe^{ax} + Qe^{bx}$ है, तो दर्शाइए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby = 0.$$

If $y = Pe^{ax} + Qe^{bx}$, show that

$$\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby = 0.$$

19. सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए कि :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc + bc + ca + ab$$

Using properties of determinants, prove that :

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc + bc + ca + ab$$

20. यदि $x = \cos t\,(3 - 2\cos^2 t)$ तथा $y = \sin t\,(3 - 2\sin^2 t)$ है, तो $t = \frac{\pi}{4}$ पर $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

If $x = \cos t\,(3 - 2\cos^2 t)$ and $y = \sin t\,(3 - 2\sin^2 t)$, find the value of $\frac{dy}{dx}$ at $t = \frac{\pi}{4}$.

21. अवकल समीकरण $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$ का विशिष्ट हल ज्ञात कीजिए, दिया गया है कि $y = 0$, जब $x = 0$ है ।

Find the particular solution of the differential equation $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = 3x + 4y$, given that $y = 0$ when $x = 0$.

22. p का मान ज्ञात कीजिए ताकि रेखाएँ $l_1 : \frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{p} = \frac{z-3}{2}$ और $l_2 : \frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ परस्पर लंबवत् हों । एक अन्य रेखा के समीकरण भी ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(3, 2, -4)$ से होकर जाती है तथा रेखा l_1 के समान्तर है ।

Find the value of p, so that the lines $l_1 : \frac{1-x}{3} = \frac{7y-14}{p} = \frac{z-3}{2}$ and $l_2 : \frac{7-7x}{3p} = \frac{y-5}{1} = \frac{6-z}{5}$ are perpendicular to each other. Also find the equations of a line passing through a point $(3, 2, -4)$ and parallel to line l_1.

खण्ड स

SECTION C

प्रश्न संख्या 23 से 29 तक प्रत्येक प्रश्न के 6 अंक हैं ।

Question numbers 23 to 29 carry 6 marks each.

23. समतलों $x + y + z = 1$ तथा $2x + 3y + 4z = 5$ की प्रतिच्छेदन रेखा को अन्तर्विष्ट करने वाले तथा समतल $x - y + z = 0$ के लंबवत् समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए । उपर्युक्त ज्ञात किए गए समतल की मूल-बिन्दु से दूरी भी ज्ञात कीजिए ।

अथवा

रेखा $\vec{r} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ तथा समतल $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु की बिन्दु (2, 12, 5) से दूरी ज्ञात कीजिए ।

Find the equation of the plane through the line of intersection of the planes $x + y + z = 1$ and $2x + 3y + 4z = 5$ which is perpendicular to the plane $x - y + z = 0$. Also find the distance of the plane obtained above, from the origin.

OR

Find the distance of the point (2, 12, 5) from the point of intersection of the line $\vec{r} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ and the plane $\vec{r} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$.

24. समाकलन का प्रयोग करके एक ऐसे त्रिकोणीय क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो शीर्षों (–1, 2), (1, 5) तथा (3, 4) द्वारा घिरा है ।

Using integration, find the area of the region bounded by the triangle whose vertices are (–1, 2), (1, 5) and (3, 4).

25. एक निर्माणकर्ता कंपनी कक्षा XII के लिए गणित में सहायक शिक्षण सामग्री के दो नमूने A तथा B बनाती है । नमूने A का प्रत्येक नग बनाने के लिए 9 श्रम घंटे और 1 श्रम घंटा पॉलिश करने में लगाती है, जबकि नमूने B के प्रत्येक नग बनाने में 12 श्रम घंटे तथा पॉलिश करने में 3 श्रम घंटे लगाती है । बनाने तथा पॉलिश करने के लिए प्रति सप्ताह उपलब्ध अधिकतम श्रम घंटे क्रमशः 180 तथा 30 हैं । कंपनी नमूने A के प्रत्येक नग पर ₹ 80 तथा नमूने B के प्रत्येक नग पर ₹ 120 कमाती है । नमूने A तथा नमूने B के कितने-कितने नगों का निर्माण प्रति सप्ताह किया जाए कि अधिकतम लाभ हो ? इस प्रश्न को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए । प्रति सप्ताह अधिकतम लाभ क्या है ?

A manufacturing company makes two types of teaching aids A and B of Mathematics for class XII. Each type of A requires 9 labour hours of fabricating and 1 labour hour for finishing. Each type of B requires 12 labour hours for fabricating and 3 labour hours for finishing. For fabricating and finishing, the maximum labour hours available per week are 180 and 30 respectively. The company makes a profit of ₹ 80 on each piece of type A and ₹ 120 on each piece of type B. How many pieces of type A and type B should be manufactured per week to get a maximum profit ? Make it as an LPP and solve graphically. What is the maximum profit per week ?

26. तीन सिक्के हैं । एक सिक्के के दोनों ओर चित ही है, दूसरा सिक्का अभिनत है जिसमें चित 75% बार प्रकट होता है तथा तीसरा सिक्का भी अभिनत है जिसमें पट 40% बार प्रकट होता है । तीन सिक्कों में से यादृच्छया एक सिक्का चुनकर उछाला गया । यदि सिक्के पर चित प्रकट हो, तो क्या प्रायिकता है कि वह दोनों ओर चित वाला सिक्का है ?

अथवा

प्रथम छः धन पूर्णांकों में से दो संख्याएँ यादृच्छया (बिना प्रतिस्थापन) चुनी गईं । माना X दोनों संख्याओं में से बड़ी संख्या व्यक्त करता है । यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए तथा इस बंटन का माध्य भी ज्ञात कीजिए ।

There are three coins. One is a two-headed coin (having head on both faces), another is a biased coin that comes up heads 75% of the times and third is also a biased coin that comes up tails 40% of the times. One of the three coins is chosen at random and tossed, and it shows heads. What is the probability that it was the two-headed coin ?

OR

Two numbers are selected at random (without replacement) from the first six positive integers. Let X denote the larger of the two numbers obtained. Find the probability distribution of the random variable X, and hence find the mean of the distribution.

27. दो विद्यालय A तथा B अपने चुने हुए विद्यार्थियों को निष्कपटता, सत्यवादिता तथा सहायकता के मूल्यों पर पुरस्कार देना चाहते हैं । विद्यालय A अपने क्रमशः 3, 2 तथा 1 विद्यार्थियों को इन तीन मूल्यों के लिए प्रत्येक को क्रमशः ₹ x, ₹ y तथा ₹ z देना चाहता है जबकि इन पुरस्कारों का कुल मूल्य ₹ 1,600 है । विद्यालय B अपने क्रमशः 4, 1 तथा 3 विद्यार्थियों को इन मूल्यों के लिए कुल ₹ 2,300 पुरस्कार स्वरूप देना चाहता है (तथा पहले विद्यालय जैसे ही तीन मूल्यों पर वही पुरस्कार राशि देना चाहता है) । यदि इन तीनों मूल्यों पर दिए गए एक-एक पुरस्कार की कुल राशि ₹ 900 है, तो आव्यूहों का प्रयोग करके प्रत्येक मूल्य के लिए दी गई पुरस्कार राशि ज्ञात कीजिए । उपर्युक्त तीन मूल्यों के अतिरिक्त एक अन्य मूल्य सुझाइए, जो पुरस्कार देने के लिए शामिल करना चाहिए ।

Two schools A and B want to award their selected students on the values of sincerity, truthfulness and helpfulness. The school A wants to award ₹ x each, ₹ y each and ₹ z each for the three respective values to 3, 2 and 1 students respectively with a total award money of ₹ 1,600. School B wants to spend ₹ 2,300 to award its 4, 1 and 3 students on the respective values (by giving the same award money to the three values as before). If the total amount of award for one prize on each value is ₹ 900, using matrices, find the award money for each value. Apart from these three values, suggest one more value which should be considered for award.

28. यदि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण तथा एक अन्य भुजा की लंबाइयों का योगफल दिया गया है, तो दर्शाइए कि त्रिभुज का क्षेत्रफल अधिकतम होगा जब उनके बीच का कोण 60° है ।

If the sum of the lengths of the hypotenuse and a side of a right triangle is given, show that the area of the triangle is maximum, when the angle between them is 60°.

29. मान ज्ञात कीजिए :

$$\int \frac{1}{\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x} \, dx$$

Evaluate :

$$\int \frac{1}{\sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x} \, dx$$

QUESTION PAPER CODE 65/3

EXPECTED ANSWERS/VALUE POINTS

SECTION - A

Marks

1-10. 1. $-I$ 2. 3 3. 1 4. -2

5. $x \sin x$ 6. $p = -\frac{1}{3}$ 7. $\{1, 2, 3\}$

8. $\vec{r} = (3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) + \lambda(-5\hat{i} + 7\hat{j} + 2\hat{k})$ 9. $a = 2$ 10. 12 $1\times 10 = 10$ m

SECTION - B

11. Given differential equation can be written as

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1+x^2} \cdot y = \frac{1}{1+x^2} \cdot e^{\tan^{-1} x}$$ 1 m

$$\text{Integrating factor} = e^{\int \frac{1}{1+x^2} dx} = e^{\tan^{-1} x}$$ 1 m

$$\therefore \text{ solution is, } y \cdot e^{\tan^{-1} x} = \int \frac{1}{1+x^2} e^{2\tan^{-1} x} dx$$ 1 m

$$\Rightarrow \quad y \cdot e^{\tan^{-1} x} = \frac{1}{2} e^{2\tan^{-1} x} + c$$ 1 m

$$\text{or} \quad y = \frac{1}{2} e^{\tan^{-1} x} + c\, e^{-\tan^{-1} x}$$

12. A, B, C, D are coplaner, if $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 0$ 1 m

$$\overrightarrow{AB} = -4\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k}, \ \overrightarrow{AC} = -\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}, \ \overrightarrow{AD} = -8\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$$ 1½ m

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -1 & 4 & 3 \\ -8 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$ ½ m

$$= -4(15) + 6(21) - 2(33) = 0$$ 1 m

OR

Given that $\vec{a} \cdot \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{\left|\vec{b}+\vec{c}\right|} = 1$ ½ m

or $\quad \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = \left|\vec{b}+\vec{c}\right|$ ½ m

$(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})+(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})\cdot(\lambda\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}) = \left|(\lambda+2)\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}\right|$ ½ m

$\Rightarrow \quad (2+4-5)+(\lambda+2+3) = \sqrt{(\lambda+2)^2+36+4}$ 1 m

$\therefore \quad (\lambda+6)^2 = (\lambda+2)^2+40 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$ ½ m

Hence $\quad \dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{\left|\vec{b}+\vec{c}\right|} = \dfrac{3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}}{7} \quad$ or $\quad \dfrac{3}{7}\hat{i}+\dfrac{6}{7}\hat{j}-\dfrac{2}{7}\hat{k}$ 1 m

13. Let $\quad I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

$x \to (\pi - x)$ gives $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{4(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{4(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ 1 m

$\therefore \quad 2I = 4\pi \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$ ½ m

Put $\cos x = t$

$\therefore \quad \sin x\,dx = -\,dt$ ½ m

$\therefore \quad I = 2\pi \displaystyle\int_1^{-1} \frac{-\,dt}{1+t^2} \quad$ or $\quad 2\pi \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$ 1 m

$= 2\pi\left[\tan^{-1} t\right]_{-1}^{1} = 2\pi\left[\dfrac{\pi}{4}-\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right] = \pi^2$ 1 m

OR

$$I = \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5x+6}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+5)-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+5x+6}}\,dx$$ 1 m

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+5}{\sqrt{x^2+5x+6}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}}$$ ½+½ m

$$= \sqrt{x^2+5x+6} - \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\frac{5}{2}\right)+\sqrt{x^2+5x+6}\right| + c$$ 1+1 m

14. $y = [x(x-2)]^2 = [x^2-2x]^2 \therefore \frac{dy}{dx} = 2\left(x^2-2x\right)(2x-2)$ 1 m

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 4x(x-1)(x-2)$ 1 m

$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x=0,\ x=1,\ x=2$ ½ m

$\therefore$ Intervals are $(-\infty, 0),\ (0, 1),\ (1, 2),\ (2, \infty)$ ½ m

since $\frac{dy}{dx} > 0$ in $(0, 1)$ or $(2, \infty)$

$\therefore$ f(x) is increasing in $(0, 1)\ \mathbf{U}\ (2, \infty)$ 1 m

OR

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y}$ 1 m

slope of tangent at $\left(\sqrt{2}a, b\right) = \frac{\sqrt{2}b}{a}$ ½ m

slope of normal at $\left(\sqrt{2}a, b\right) = -\frac{a}{\sqrt{2}b}$ ½ m

Equation of tangent is $y - b = \frac{\sqrt{2}\,b}{a}\left(x - \sqrt{2}\,a\right)$ ½ m i.e. $\sqrt{2}\ bx - ay = ab$ ½ m

and equation of normal is $y - b = -\frac{a}{\sqrt{2}\ b}\left(x - \sqrt{2}\ a\right)$ ½ m

i.e. $ax + \sqrt{2}\ by = \sqrt{2}\ (a^2 + b^2)$ ½ m

15. getting $fog\,(x) = f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + 2$ 1½ m

$fog(2) = 6$ ½ m

getting $g\,of\,(x) = g\left(x^2 + 2\right) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$ 1½ m

$g\,of\,(-3) = \frac{11}{10}$ ½ m

16. Putting $x = \cos\theta$ in LHS, We get

$$\text{LHS} = \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{1+\cos\theta} - \sqrt{1-\cos\theta}}{\sqrt{1+\cos\theta} + \sqrt{1-\cos\theta}}\right]$$ 1 m

$$= \tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}\cos\theta/2 - \sqrt{2}\sin\theta/2}{\sqrt{2}\cos\theta/2 + \sqrt{2}\sin\theta/2}\right]$$ 1 m

$$= \tan^{-1}\left[\frac{1 - \tan\theta/2}{1 + \tan\theta/2}\right] = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta/2\right)\right]$$ ½+1 m

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x = \text{R.H.S}$$ ½ m

OR

Given equation can be written as

$$\tan^{-1}\left(\frac{x-2}{x-4}\right) = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1}\left(\frac{x+2}{x+4}\right)$$ ½ m

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1-\frac{x+2}{x+4}}{1+\frac{x+2}{x+4}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{2x+6}\right)$$ 1+½ m

$$\therefore \quad \frac{x-2}{x-4} = \frac{1}{x+3}$$ ½ m

$$\Rightarrow \quad x^2 + x - 6 = x - 4 \quad \text{or} \quad x^2 = 2 \;\therefore\; x = \pm\sqrt{2}$$ ½+1 m

17. Let probability of success be p and that of failure be q

$\therefore \quad p = 3\,q$, and $p + q = 1$

$\therefore \quad p = \frac{3}{4}$ and $q = \frac{1}{4}$ 1 m

P (atleast 3 successes) = $P(r \geq 3) = P(3) + P(4) + P(5)$ ½ m

$$= {}^5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + {}^5C_4\left(\frac{1}{4}\right)^1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + {}^5C_5\left(\frac{3}{4}\right)^5$$ 1½ m

$$= \frac{10.27}{1024} + \frac{5.81}{1024} + \frac{243}{1024} = \frac{918}{1024} \text{ or } \frac{459}{512}$$ 1 m

18. $y = P\,e^{ax} + Q\,e^{bx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = a\,P\,e^{ax} + b\,Q\,e^{bx}$ 1 m

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a^2\,P\,e^{ax} + b^2\,Q\,e^{bx}$$ 1 m

$$\therefore \quad \text{LHS} = \frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby$$

$$= a^2 P e^{ax} + b^2 Q e^{bx} - (a+b)\left\{a P e^{ax} + b Q e^{bx}\right\} + ab\left\{P e^{ax} + Q e^{bx}\right\}$$ 1 m

$$= P e^{ax}\left\{a^2 - a^2 - ab + ab\right\} + Q e^{bx}\left\{b^2 - ab - b^2 + ab\right\}$$ 1 m

$$= 0 + 0 \quad = \quad 0. \quad = \quad \text{R.H.S.}$$

19. $R_1 \to \frac{1}{a}R_1,\ R_2 \to \frac{1}{b}R_2,\ R_3 \to \frac{1}{c}R_3$

$$\therefore \quad \text{LHS} = abc\begin{vmatrix} \frac{1}{a}+1 & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$R_1 \to R_1 + R_2 + R_3 \Rightarrow \text{LHS} = abc\begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{b} & \frac{1}{b}+1 & \frac{1}{b} \\ \frac{1}{c} & \frac{1}{c} & \frac{1}{c}+1 \end{vmatrix}$$ ½ m

$$\begin{matrix} C_2 \to C_2 - C_1 \\ C_3 \to C_3 - C_1 \end{matrix} \quad = \quad abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 & 0 \\ \frac{1}{c} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$ 1 m

$$= \ abc \left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).\ 1 = abc + bc + ca + ab$$ ½ m

$$= \text{RHS}$$

20. $x = 3\cos t - 2\cos^3 t \quad \therefore \quad \frac{dx}{dt} = -3\sin t + 6\cos^2 t \sin t$ 1 m

$y = 3\sin t - 2\sin^3 t \quad \therefore \quad \frac{dy}{dt} = -3\cos t - 6\sin^2 t \cos t$ 1 m

$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cos t\,(1 - 2\sin^2 t)}{3\sin t\,(-1 + 2\cos^2 t)} = \cot t$ 1 m

at $t = \pi/4$, $\frac{dy}{dx} = 1$ 1 m

21. Given differential equation can be written as

$\frac{dy}{dx} = e^{3x+4y} = e^{3x} \cdot e^{4y}$ 1 m

$\therefore \int e^{-4y}\, dy = \int e^{3x}\, dx$ 1 m

$\frac{e^{-4y}}{-4} = \frac{e^{3x}}{3} + c$ 1 m

$\therefore \ 4e^{3x} + 3e^{-4y} + 12c = 0$

taking $x = 0, y = 0$ we get $c = -\frac{7}{12}$ ½ m

$\therefore$ The solution is $4e^{3x} + 3e^{-4y} - 7 = 0$ ½ m

22. Given lines can be written as

$\mathbf{l}_1 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{p/7} = \frac{z-3}{2}; \quad \mathbf{l}_2 : \frac{x-1}{-3p/7} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-6}{-5}$ 1 m

since the lines are perpendicular

$\therefore \quad (-3)\left(-\frac{3p}{7}\right)+\left(\frac{p}{7}\right)(1)+(2)(-5)=0$ 1 m

$\Rightarrow \quad p = 7$ 1 m

Equation of line passing through (3, 2, – 4) and parallel to $\mathbf{l}_1$ is

$$\frac{x-3}{-3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$$ 1 m

SECTION - C

23. Equation of plane through the intersection of given two planes is :

$$x + y + z - 1 + \lambda\ (2x + 3y + 4z - 5) = 0$$ 1 m

or $(1+2\lambda)x + (1+3\lambda)y + (1+4\lambda)z - 1 - 5\lambda = 0$ .... (i) ½ m

Plane (i) is perpendicular to the plane $x - y + z = 0$,

so, $1(1+2\lambda) - 1(1+3\lambda) + 1(1+4\lambda) = 0$ 1½ m

$\Rightarrow \quad 3\lambda = -1 \quad \therefore \quad \lambda = -\frac{1}{3}$ ½ m

$\therefore$ Equation of plane is $\left(1-\frac{2}{3}\right)x + (1-1)y + \left(1-\frac{4}{3}\right)z - 1 + \frac{5}{3} = 0$ ½ m

i.e $\quad x - z + 2 = 0$ 1 m

Distance of above plane from origin $= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ units 1 m

OR

Any point on the line $\vec{r} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k} + \lambda(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k})$ is

$$(2+3\lambda)\hat{i} + (-4+4\lambda)\hat{j} + (2+2\lambda)\hat{k}$$ 1½ m

For the line to intersect the plane, the above point must
satisfy the equation of plane, for some value of λ

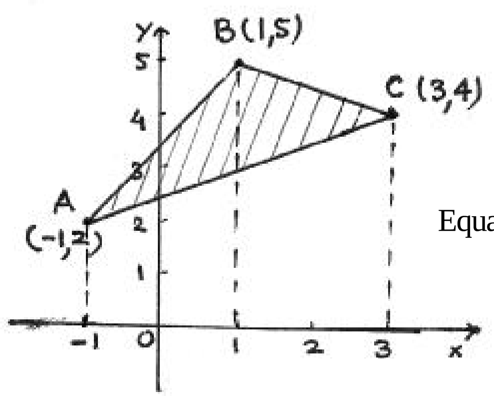
$\therefore \quad \{(2+3\lambda)\hat{i} + (-4+4\lambda)\hat{j} + (2+2\lambda)\hat{k}\} \cdot (\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) = 0$ 1 m

$\Rightarrow \quad 2 + 3\lambda + 8 - 8\lambda + 2 + 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 4$ 1½ m

$\therefore$ The point of intersection is $14\hat{i} + 12\hat{j} + 10\hat{k}$ 1 m

Required distance = $\sqrt{12^2 + 0^2 + 5^2} = 13$ units 1 m

24.



Correct fiqure 1 m

Equation of $\begin{cases} AB \quad \text{is}: y = \frac{1}{2} \quad (3x+7) \\ BC \quad \text{is}: y = \frac{1}{2} \quad (11-x) \\ AC \quad \text{is}: y = \frac{1}{2} \quad (x+5) \end{cases}$ ½ m, ½ m, ½ m

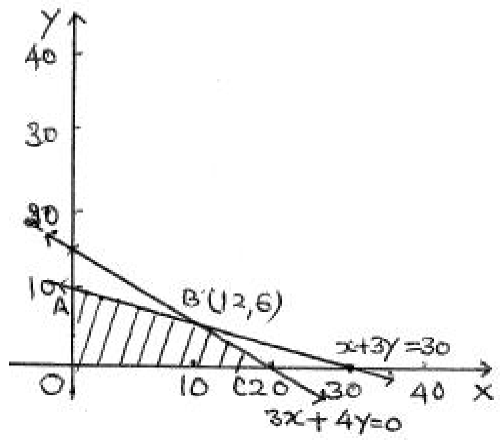
Required area = $\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(3x+7)\,dx + \frac{1}{2}\int_{1}^{3}(11-x)\,dx - \frac{1}{2}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx$ 1 m

$= \left[\frac{1}{12}(3x+7)^2\right]_{-1}^{1} - \frac{1}{4}\left[(11-x)^2\right]_1^3 - \frac{1}{4}\left[(x+5)^2\right]_{-1}^{3}$ 1½

$= 7 + 9 - 12 = 4$ sq. units 1 m

25. Let number of pieces of type A and type B, manufactured per week be x and y respectivily

$\therefore$ L.P.P. is Maximise $P = 80x + 120y$ ½ m



subject to $9x + 12y \le 180$ or $3x + 4y \le 60$

$x + 3y \le 30$

$x \ge 0 \quad y \ge 0$ 2 m

For correct graph : 2 m

Vertices of feasible region are

A (0, 10), B (12, 6), C (20, 0)

P(A) = 1200, P(B) = 1680, P(C) = 1600

$\therefore$ For Max. P, No. of type A = 12

No. of type B = 6 1 m

Maximum Profit = Rs. 1680 ½ m

26. Let event E_1 : choosing first (two headed) coin

E_2 : choosing 2nd (biased) coin ½ m

E_3 : choosing 3rd (biased) coin

$\therefore \quad P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$ 1 m

A : The coin showing heads.

$\therefore \quad P(A/E_1) = 1,\ P(A/E_2) = \frac{75}{100} = \frac{3}{4},\ P(A/E_3) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$ 1½ m

$$P(E_1/A) = \frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}}$$ 1 + 1 m

$$= \frac{20}{47}$$ 1 m

OR

Total number of ways of selecting two numbers = ${}^6C_2 = 15$ ½ m

Values of x (larger of the two) can be 2, 3, 4, 5, 6 1 m

$P(x = 2) = \frac{1}{15},\quad P(x = 3) = \frac{2}{15},\quad P(x = 4) = \frac{3}{15}$

2½

$P(x = 5) = \frac{4}{15}$ and $P(x = 6) = \frac{5}{15}$

$\therefore$ Distribution can be written as

x :	2	3	4	5	6
P(x) :	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$
x P(x) :	$\frac{2}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{12}{15}$	$\frac{20}{15}$	$\frac{30}{15}$

1 m

$$\text{Mean} = \sum x\, P(x) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3}$$ 1 m

27. Here

$$\begin{array}{ccccccc} 3x & + & 2y & + & z & = & 1600 \\ 4x & + & y & + & 3z & = & 2300 \\ x & + & y & + & z & = & 900 \end{array}$$ 1½

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 2300 \\ 900 \end{pmatrix} \text{ or } AX = B$$

$$|A| = 3(-2) - 2(1) + 1(3) = -5 \neq 0 \quad \therefore \quad X = A^{-1}B$$ ½ m

Cofactors are :

$$\begin{array}{lll} A_{11} = -2, & A_{12} = -1, & A_{13} = 3 \\ A_{21} = -1, & A_{22} = 2, & A_{23} = -1 \\ A_{31} = 5, & A_{32} = -5, & A_{33} = -5 \end{array}$$ 1½ m

$$\therefore \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1600 \\ 2300 \\ 900 \end{pmatrix}$$

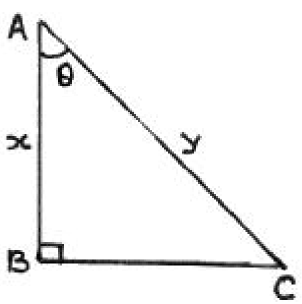
$\therefore \quad x = 200,\ y = 300,\ z = 400$ 1½ m

i.e. Rs 200 for sincerity, Rs 300 for truthfulness and

Rs 400 for helpfulness

One more value like, honesty, kindness etc. 1 m

28.



let the length of the side AB of rt. ΔABC be x and

that of hypotenuse AC be y, and

$x + y = k$ (given) 1 m

$$\text{Area of } \Delta ABC = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - x^2} \cdot x$$ 1 m

$$\text{let } S = \frac{1}{4}\, x^2 (y^2 - x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\, x^2 [(k-x)^2 - x^2]$$

$$= \frac{1}{4}\, [k^2\ x^2 - 2k\, x^3]$$ 1 m

$$\frac{ds}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{4}\left(2k^2x - 6\,kx^2\right) = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{k}{3}$$ 1 m

$$\text{and } \frac{d^2s}{dx^2} = \frac{1}{4}\left(2k^2 - 12\,kx\right) = \frac{1}{4}\left(2k^2 - 4\,k^2\right) < 0$$ 1 m

$\therefore$ area of Δ is maximum for $x = k/3$ and $y = k - k/3 = 2k/3$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{x}{y} = 1/2$ Hence $\theta = \frac{\pi}{3}$ 1 m

29. $$I = \int \frac{1}{\sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x}\, dx$$

$$= \int \frac{\left(\tan^2 x + 1\right)\sec^2 x}{\tan^4 x + \tan^2 x + 1}\, dx,$$ [dividing N & D by $\cos^4 x$] 1 m

$$= \int \frac{t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 1}\, dx,$$ where $\tan x = t$ ½ m

$$= \int \frac{1 + \frac{1}{t^2}}{t^2 + \frac{1}{t^2} + 1}\, dx,$$ [dividing N & D by t^2] ½ m

Putting $t - \frac{1}{t} = z$ so that $\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt = dz$ 1 m

$$\text{and } t^2 + \frac{1}{t^2} = z^2 + 2$$ ½ m

$$\therefore \quad I = \int \frac{dz}{z^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} \qquad 1\text{ m}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \frac{z}{\sqrt{3}} + c = \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{t^2 - 1}{\sqrt{3}\, t}\right) + c\, \frac{1}{\sqrt{3}} \tan^{-1}\left(\frac{\tan^2 x - 1}{\sqrt{3} \tan x}\right) + c \qquad 1\tfrac{1}{2}\text{ m}$$